Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Обучающегося по программе профессиональной переподготовки

Технологический и стоимостной инжиниринг

(с присвоением квалификации «Магистр»)

по дисциплине

Методы многокритериальной оптимизации при принятии решений

на тему

Методы нелинейного программирования

Соискатель квалификации: Э.В. ЭтоВы

Работа защищена:

Руководитель: к.т.н., доцент В.А. Смирнов

Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в самых разных областях строительной практики возникают задачи, сходные между собой по постановке, обладающие рядом общих признаков и решаемые сходными методами. Организация целенаправленных мероприятий тем или иным способом, выбор решения из ряда возможных вариантов – действия, опирающиеся как на аналитические, в том числе вероятностно-статистические, операции, так и на субъективные процедуры. Даже в последнем случае – принятие волевых решений – важны методы, позволяющие оценить эффективность того или иного варианта, отбросить недопустимые и установить, достаточна ли имеющаяся информация для правильного выбора решения. Решения на основе опыта, интуиции и здравого смысла оправданы лишь тогда, когда они основаны на строгих математических выкладках.

1. РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПТИМИЗАЦИИ

Термин *оптимизация* имеет множество значений. Частная трактовка этого термина зависит от области знания; в математическом анализе, математическом программировании, информационных технологиях, экономике и других областях сформулированы различные определения. В курсе дифференциального исчисления рассматриваются задачи аналитического нахождения безусловного локального экстремума, экстремума с ограничениями в виде равенств, а также задача отыскания наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке или в замкнутой области. В информационных технологиях оптимизация может пониматься как повышение вычислительной эффективности – как снижение требований к ресурсам, необходимым для решения вычислительной задачи. В экономике оптимизация понимается как комплекс мер по увеличению отношения полезного результата к затратам. Общность этих определений проявляется в том, что оптимизация понимается как процесс поиска наилучшего в принятом смысле решения.

Строгое количественное исследование систем всегда привлекает методы математики; алгоритмы поиска становятся доступны только после того, как будет сформулирован количественный критерий оптимальности. Формулировка такого критерия является существенно более сложной задачей по сравнению с выбором математических процедур (вычислительно-логических алгоритмов) решения оптимизационной задачи.

Определения оптимизации, подобные принятому в экономике, являются наиболее общими. Математические методы являются важнейшим инструментом анализа экономических явлений и процессов, построения теоретических *моделей*, позволяющих отобразить существующие связи в экономической жизни, прогнозировать поведение экономических субъектов и экономическую динамику. *Математическое моделирование* является языком современной экономики и основой *теории принятия решений* (дисциплины, привлекающей понятия и методы математики, статистики, экономики, менеджмента и психологии для изучения закономерностей выбора людьми путей решения проблем и задач, а также способов достижения желаемого результата); оно широко применяется для управления – планирования, прогнозирования и контроля – экономическими объектами и процессами.

В то же время, на основе определений оптимизации, подобных определению, принятому в экономике, зачастую сложно сформулировать алгоритмы поиска оптимального решения. Это обусловлено тем, что понимание полезного результата субъективно и включает множество трудно формализуемых понятий. Плохо формализуемые оптимизационные задачи – предмет дисциплины, называемой *исследованием операций* (англ. *management science* наука управления – дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов нахождения оптимальных решений на основе математического моделирования, статистического моделирования и различных эвристических подходов). В сравнительно простых ситуациях для решения прикладных оптимизационных задач достаточными оказываются методы *математического программирования*.

2. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическое программирование в управлении можно интерпретировать как процесс распределения ресурсов. Существует ряд различных оптимизационных методов, основанных на идеях математического программирования. Актуальность применения этих оптимизационных методов определяется возрастающей ролью различных методов моделирования, используемых для совершенствования планирования и анализа деятельности компаний. Представление изучаемого процесса в виде *математической модели* позволяет конкретизировать информацию, создавать и моделировать варианты, и на этой основе выбирать оптимальные решения.

Моделью называют представление системы. Если это представление корректно отражает исследуемые характеристики системы, то модель называют *адекватной* исследуемой системе. *Моделированием* называют замену исследуемого объекта его моделью и последующее исследование модели. Таким образом, моделирование включает выполнение двух взаимосвязанных операций – разработки и исследования модели. Эти операции могут неоднократно повторяться в процессе уточнения модели и/или метода ее исследования. Термины «*метод* моделирования» и «*алгоритм* моделирования» в зависимости от контекста могут применяться как для отдельных операций разработки или исследования модели, так и для двух этих операций в целом. Полезно помнить о взаимосвязи понятий метода и алгоритма: их сходство проявляется в том, что оба этих понятия обозначают обусловленную целью последовательность действий; различие состоит в том, что для алгоритма достижение цели гарантируется, а для метода – нет.

В основе классификаций моделей, методов и алгоритмов моделирования могут находиться многочисленные признаки. В частности, классификацию можно выполнять на основе:

– метода разработки модели;

– формы представления модели;

– метода анализа модели.

Термин *математическое моделирование* отражает классификацию по форме представления модели; следует помнить, что такая классификация не единственна.

Математической моделью называют математическое представление системы. Большинство признаков, по которым проводят классификацию математических моделей, позволяют разбить множество моделей на два класса. По этой причине в характеристику модели обычно входит большое число признаков: алгебраическая или аналитическая, структурная или функциональная (в частности, феноменологическая), статическая или динамическая, детерминированная или стохастическая, дискретная или непрерывная, линейная или нелинейная и т.п. Классификацию по степени детализации (полноты представления объекта) обычно не выполняют, обозначая предварительные модели термином «*концептуальная модель*».

Математическим моделированием называют моделирование с использованием математических моделей (замену исследуемого объекта его математической моделью и последующее исследование модели).

Роль математического моделирования в науке обусловлена его достоинствами:

1. *Универсальность математических моделей*: если в основе явлений лежат сходные закономерности, то математическое описание явлений будет одинаковым и не зависящим от сущности явлений. Универсальность моделей во многих случаях позволяет исключить этап анализа модели, если разработанная модель по форме совпадает с какой-либо из уже исследованных.

2. *Возможность выполнения многовариантных исследований*: в отличие от моделируемого объекта, математическая модель исследуется посредством аналитических и вычислительно-логических методов, не требующих существенных затрат материальных ресурсов; это позволяет анализировать явление при всех интересующих наборах управляющих параметров.

Искусство построения адекватных и аналитически простых математических моделей основано не только на сведениях из предметной области (отраженной, например, кодом научной специальности), но и на умениях применять методы из многочисленных разделов математики: алгебры, анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и многих других. Следует помнить, что такие навыки, как навык аналитического нахождения первообразной и приведения дифференциального уравнения к квадратуре сами по себе ценности не имеют – эти и многие другие действия на практике удобнее выполнять с использованием пакетов символьной математики. Цель курса анализа – не только и не столько сами эти навыки, сколько формирование умений применять универсальный язык науки – язык математики, описание системы на котором является наиболее продуктивным.

Процессы математического моделирования можно представить в виде циклических графов (рис. 1-3), узлы которых представляют знания, методы и объекты, а ребра – их преобразование.

Модель, построенная средствами математического анализа исходя из сведений предметной области, может допускать аналитическое исследование. Результаты исследования интерпретируются в терминах предметной области. Цикл графа образован двумя узлами (рис. 1).

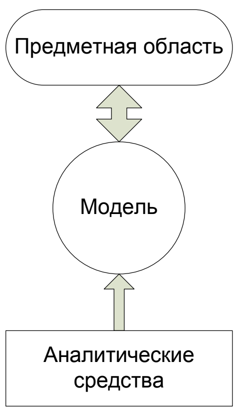

Рис. 1. Аналитическое исследование модели

В случае, когда средств математического анализа недостаточно для исследования модели, дополнительно могут привлекаться приближенные аналитические и/или численные методы (рис. 2, 3).

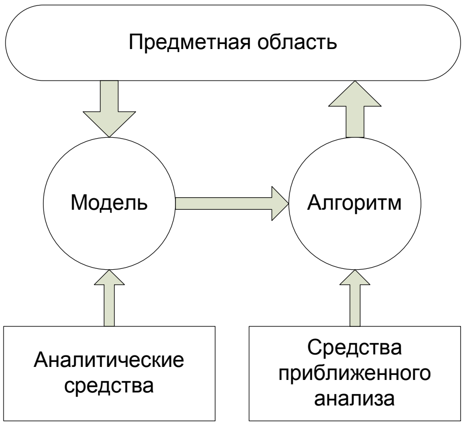

Рис. 2. Исследование модели приближенными аналитическими методами

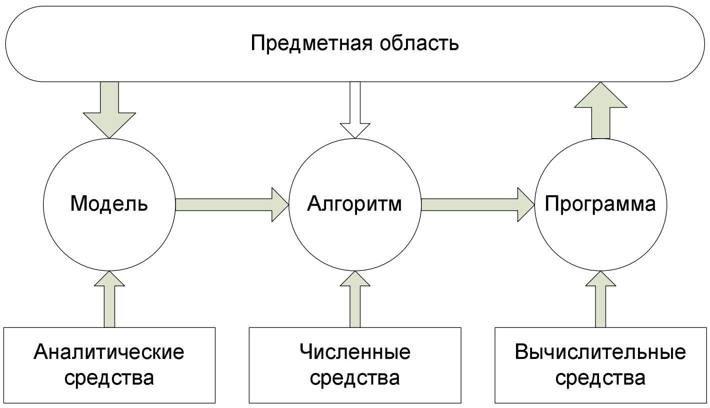

Рис. 3. Полный граф математического моделирования

Последний рисунок соответствует выполнению *численного моделирования* (*simulation*) – построения и исследования модели в форме программы для вычислительной машины.

Пусть математическая модель представляет скалярный критерий оптимальности q, понимаемый как *качество* или, что с точки зрения методов то же самое, *издержки*; достаточно ограничиться первым. Количественное описание качества q может быть или аналитической зависимостью q от некоторых переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, или же являться алгоритмом (расчетным или эмпирическим) поиска значения качества по значениям этих переменных. Аналитическое выражение качества называют *целевой функцией*.

Переменные $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называют *входными переменными* или *факторами системы*. В реальных ситуациях факторы системы могут представлять технические средства, личные предпочтения исследователя и многие другие нечисловые величины; применение методов математики требует количественного выражения входных переменных. Пространство, координатами в котором являются входные переменные, называют *факторным пространством*.

Существование количественного описания качества подразумевает, что входные переменные допускают возможность контролируемого изменения; более строго, такие переменные называют *управляемыми* или *варьируемыми*. В реальных задачах входные переменные обычно не могут принимать произвольные значения конкретизировать. Множество X допустимых значений входных переменных называют *допустимым множеством*. Аналитически это множество может определяться системой уравнений и/или неравенств относительно входных переменных. Эти уравнения и неравенства называют *условиями связи*.

Математическим программированием называют дисциплину, разрабатывающую методы отыскания экстремальных значений качества на допустимом множестве. Термин *программирование* возник в связи с тем, что первые оптимизационные задачи относились к сфере экономики; термин *programming* использовался в значении *планирование*.

Интерес представляют точки глобальных минимумов или максимумов целевой функции. Такие точки могут находиться или на границе допустимого множества, или внутри него; в последнем случае эти точки должны являться точками локальных экстремумов целевой функции. Так как максимум функции $q(\mathbf{x})$ является минимумом функции $-q(\mathbf{x})$, то задачи поиска максимума (качества) и минимума (издержек) неотличимы друг от друга; один и тот же алгоритм пригоден для поиска экстремума любого вида.

Важно, что в число задач математического программирования входят только те оптимизационные задачи, для которых понятие качества системы допускает скалярное представление. Такие задачи являются *однокритериальными* оптимизационными задачами.

Дополнительным классификационным признаком методов математического программирования является общий вид целевой функции. В частности, *линейным программированием* называют оптимизационные задачи с линейной целевой функцией и линейными *условиями связи*; *нелинейным программированием* – задачи, в которых либо целевая функция, либо хотя бы одно из условий связи являются нелинейными.

Условия связи, определяющие допустимое множество *X*, в задачах нелинейного программирования могут иметь вид равенств или неравенств:

$$X = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \le 0 \wedge g_j(\mathbf{x}) = 0, i = \overline{1,N}, j = \overline{1,M}\}.$$

Типичными областями применения нелинейного программирования являются прогнозирование, планирование промышленного производства, управление товарными ресурсами, контроль качества выпускаемой продукции, планирование обслуживания и ремонта, проектирование технологических линий и процессов.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть даны два множества *X* и *Y*. *Функцией* называют правило *f*, сопоставляющее каждому значению $x \in X$ значения $y \in Y$:

$$f : x \to y.$$

При этом множество *X* называют *областью определения*, а каждый его элемент *x* – *аргументом* функции. Множество *Y* называют *областью значений*, а каждый его элемент – *значением* функции *f*.

Если множества *X* и *Y* есть подмножества множества действительных чисел, то функцию *f* называют *скалярной функцией одного действительного переменного*. Если функция *f* каждому значению $x \in X$ сопоставляет единственное значение $y \in Y$, то функцию называют *однозначной*. Однозначная функция может быть записана в виде

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ – *аналитическое выражение*. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется геометрическое место точек $(x, f(x))$. График однозначной функции есть линия, которая при любом $a \in X$ пересекается с прямой $x = a$ в единственной точке.

Функция называется *возрастающей*, если

$$(\forall \{x_1, x_2\} \subset X \mid x_2 > x_1)(f(x_2) > f(x_1)).$$

Функция называется *убывающей*, если

$$(\forall \{x_1, x_2\} \subset X \mid x_2 > x_1)(f(x_2) < f(x_1)).$$

Функция называется *невозрастающей*, если

$$(\forall \{x_1, x_2\} \subset X \mid x_2 > x_1)(f(x_2) \le f(x_1)).$$

Функция называется *неубывающей*, если

$$(\forall \{x_1, x_2\} \subset X \mid x_2 > x_1)(f(x_2) \ge f(x_1)).$$

Функция называется *монотонной*, если она является или возрастающей, или убывающей, или невозрастающей, или неубывающей. Функция называется *строго монотонной*, если она является или возрастающей, или убывающей. Для строго монотонной функции

$$(\forall \{x_1, x_2\} \subset X \mid x_1 \neq x_2)(f(x_1) \neq f(x_2)),$$

т.е. различным значениям аргумента сопоставляются различные значения функции.

Пусть $y = f(x)$ – строго монотонная функция. Тогда существует функция

$$x = \varphi(y),$$

такая, что

$$y = f(\varphi(y)).$$

Функцию φ называют *обратной* для функции *f*. Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ совпадают. Если переобозначить переменные, записав $y = \varphi(x)$, то графики взаимно обратных функций окажутся симметричными относительно прямой $y = x$.

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки *a*. Сама точка *a* может и не принадлежать области определения функции. Число *A* называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0 \| x - a| < \delta \Rightarrow | f(x) - A| < \varepsilon).$$

Смысл последнего определения состоит в том, что всегда можно отыскать окрестность точки *a*, такую, что для всех значений аргумента из этой окрестности значения функции будут отличаться от *A* сколь угодно мало.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* (*бесконечно малой величиной*) при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* (*бесконечно большой величиной*) при $x \to a$, если

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0 \| x - a| < \delta \Rightarrow | f(x)| > M).$$

Смысл последнего определения состоит в том, что бесконечно большая при $x \to a$ в окрестности точки *a* становится больше любого заранее заданного числа *M*. Записывают:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Функция называется *ограниченной* в области *D*, если существует $M > 0$, такое, что

$$(\forall x \in D)(|f(x)| \le M).$$

График ограниченной функции расположен между прямыми $y = -M$ и $y = M$ (и, возможно, касается этих прямых).

Если δ-окрестность, о которой говорится в определении предела, расположена полностью левее точки *a*, то предел называют *левосторонним*: $\lim_{x \to a-0} f(x)$. Если окрестность расположена полностью правее точки *a*, то предел называют *правосторонним*: $\lim_{x \to a+0} f(x)$. Левосторонний и правосторонний пределы называют *односторонними*. Из существования предела $\lim_{x \to a} f(x)$ следует существование односторонних пределов.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке *a*, если односторонние пределы в этой точке существуют и совпадают со значением функции:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a).$$

Если условие непрерывности нарушено, то говорят, что в точке *a* функция $f(x)$ *терпит разрыв*.

Пусть функция $y = y(x)$ определена на интервале, содержащем точку *x*. Выберем некоторое число Δx – *приращение аргумента* – так, чтобы точка $x + \Delta x$ также принадлежала указанному интервалу. *Приращением функции* Δy называется разность

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x).$$

Разностным отношением называется частное $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ от деления приращения функции на приращение аргумента.

Если существует предел разностного отношения при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x},$$

то он называется *производной* функции $y = y(x)$ в точке *x*. Операцию нахождения производной называют *дифференцированием*.

Пусть функция $y = y(x)$ определена на интервале, содержащем точку *x*. Пусть приращение аргумента выбрано так, что точка $x + \Delta x$ также принадлежит указанному интервалу.

Функция $y = y(x)$ называется *дифференцируемой* в точке *x*, если в этой точке ее разностное отношение можно представить в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где A – число, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Пусть функция $y(x)$ определена в окрестности точки $x = c$.

Функция $y(x)$ называется *возрастающей в точке* *c*, если найдется окрестность точки *c*, в которой $y(x) > y(c)$ при $x > c$ и $y(x) < y(c)$ при $x < c$.

Функция $y(x)$ называется *убывающей в точке* *c*, если найдется окрестность точки *c*, в которой $y(x) > y(c)$ при $x < c$ и $y(x) < y(c)$ при $x > c$.

Если функция $y(x)$ дифференцируема в точке *c* и $y'(c) > 0$, то функция возрастает в точке *c*. Если функция $y(x)$ дифференцируема в точке *c* и $y'(c) < 0$, то функция убывает в точке *c*.

Точка $x = c$ называется точкой *локального максимума* функции $y(x)$, если найдется окрестность точки *c*, в пределах которой значение $y(c)$ является наибольшим.

Точка $x = c$ называется точкой *локального минимума* функции $y(x)$, если найдется окрестность точки *c*, в пределах которой значение $y(c)$ является наименьшим.

Точка $x = c$ называется точкой *локального экстремума*, если она является точкой локального минимума или локального максимума.

Теорема (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая в точке $x = c$ функция достигает в этой локального экстремума, то $y'(c) = 0$.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $y(x)$ непрерывна в окрестности точки c и дифференцируема в этой окрестности всюду, за исключением, возможно, самой точки c. Если при этом производная положительна при $x < c$ и отрицательна при $x > c$, то точка $x = c$ является точкой локального максимума; если производная отрицательна при $x < c$ и положительна при $x > c$, то точка $x = c$ является точкой локального минимума.

Теорема (второе достаточное условие экстремума). Пусть функция $y(x)$ непрерывна в окрестности точки c и всюду дважды дифференцируема в этой окрестности. Если при этом $y''(c) < 0$, точка $x = c$ является точкой локального максимума; если $y''(c) > 0$, то точка $x = c$ является точкой локального минимума.

Если *многомерная* однокритериальная оптимизационная задача не включает условий связи, то она является задачей на безусловную оптимизацию. Такая задача сводится к поиску локальных экстремумов целевой функции.

Необходимые и достаточные условия локального экстремума были одними из первых результатов, полученных в математическом анализе и используемых в нелинейном программировании. Необходимые условия являются менее жесткими и с точки зрения формулировок более простыми. Достаточные условия добавляют некоторые дополнительные требования к задаче и искомой точке экстремума.

Теорема (необходимое условие локального экстремума). Если точка $\mathbf{x}_{opt}$ доставляет минимум дифференцируемой функции $q = q(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{x}_{opt} = \arg\min_{\mathbf{x}\in X} q(\mathbf{x}),$$

то эта точка является стационарной точкой функции – в этой точке все частные производные обращаются в ноль, т.е. в нулевой вектор обращается градиент:

$$\operatorname{grad} q(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Важность данной теоремы заключается в том, что она, во-первых, привлекает понятие градиента (и производной по направлению) и, во-вторых, подсказывает направление, в котором можно улучшить (уменьшить) целевую функцию, если ее градиент отличен от нуля.

Первое дает возможность формулировать условия оптимальности и для других классов функций при существовании градиента: примерами таких функций являются кусочно-гладкие функции и пр. Второе порождает *градиентный метод* минимизации.

Достаточное условие локального экстремума формулируется несколько сложнее.

Симметричную квадратную матрицу

$$\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_k \partial x_s}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 q}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial^2 q}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 q}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 q}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

образованную вторыми производными целевой функции, называют *матрицей Гессе*.

Из линейной алгебры известно определение *главных миноров*: главными минорами квадратной матрицы (a_{ks}) называют миноры

$$A_1 = |a_{11}| = a_{11};\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\ \ldots;\ A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема (достаточное условие локального экстремума). Пусть функция $q = q(\mathbf{x})$ дифференцируема в окрестности точки **x** и дважды дифференцируема в самой точке **x**. Пусть также точка **x** является стационарной точкой функции. Тогда функция $q = q(\mathbf{x})$ имеет в точке **x** локальный минимум, если все главные миноры матрицы Гессе, вычисленные в точке **x**, положительны (матрица положительно определена); функция $q = q(\mathbf{x})$ имеет в точке **x** локальный максимум, если первый главный минор $\dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}$ отрицателен и знаки главных миноров чередуются. Если при невырожденной матрице Гессе ни одно из указанных условий не выполнено, то точка **x** не является точкой локального экстремума (в частности, она может являться *седловой точкой*; такой точкой локальный экстремум не будет ни при каких условиях).

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда на этом отрезке она достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения могут достигаться либо на границах отрезка, либо в его внутренних точках. В последнем случае искомая точка должна являться либо стационарной точкой функции $y(x)$, либо точкой, в которой первая производная $y'(x)$ терпит разрыв.

Поэтому для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует:

1. Найти внутренние точки отрезка $[a;b]$, в которых производная $y'(x)$ равна нулю или не определена.

2. Вычислить значения функции в найденных точках.

3. Вычислить значения функции на концах отрезка.

4. Среди всех найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \left|x^2 - 4\right|$ на отрезке $[-1;3]$.

Двучлен $x^2 - 4$ отрицателен при $|x| < 2$. Используя определение модуля, функцию $y = \left|x^2 - 4\right|$ можно записать в виде

$$y(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \le -2 \\ 4 - x^2, & 2 < x < 2. \\ x^2 - 4, & x \ge 2 \end{cases}$$

Производная данной функции

$$y'(x) = \begin{cases} 2x, & x \le -2 \\ -2x, & 2 < x < 2 \\ 2x, & x \ge 2 \end{cases}$$

обращается в нуль в точке $x=0$ и терпит разрывы первого рода в точках $x=\pm 2$. Из этих точек внутренними для отрезка $[-1;3]$ являются $x=0$ и $x=2$. Вычисляя значения функции, получим:

$$y(0)=4,\ y(2)=0.$$

На концах отрезка функция равна:

$$y(-1)=3,\ y(3)=5.$$

Следовательно, наименьшее значение функции, равное 0, достигается в точке $x=2$; наибольшее значение, равное 5, достигается в точке $x=3$. График функции $y=\left|x^2-4\right|$ и ее производной показан на рис. 4.

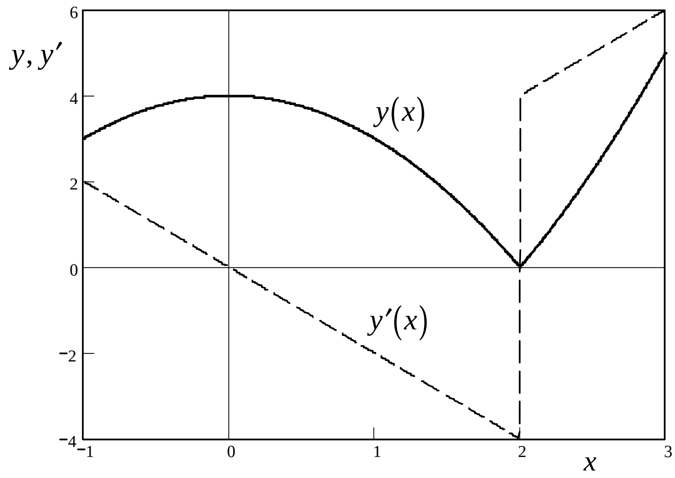

Рис. 4. График функции $y=\left|x^2-4\right|$ и ее производной на отрезке $[-1;3]$

Задача на условную оптимизацию при ограничениях-равенствах является частным случаем задачи нелинейного программирования.

Отличительной чертой нелинейного программирования является *отсутствии общего метода решения* задач, такого, например, как, симплекс-метод, разработанный для задач линейного программирования. Предложено большое число различных стратегий поиска оптимальных решений, но широкое распространение получили лишь немногие из них.

Пусть требуется найти условный экстремум функции $m+n$ переменных

$$y=q(x_1,x_2,..,x_n,y_1,y_2,...,y_m)=q(\mathbf{x},\mathbf{y}), \tag{1}$$

на аргументы которой наложены m *условий связи*, имеющих вид равенств:

$$g_i(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)=0,\ i=\overline{1,m}. \tag{2}$$

Если ограничения-равенства можно однозначно разрешить относительно m различных переменных

$$y_s=y_s(\mathbf{x}),\ s=\overline{1,m}, \tag{3}$$

то эти переменные удается исключить из задачи. Отыскание условного экстремума посредством исключения переменных из (1) приводит к необходимости аналитического решения системы (в общем случае нелинейных) уравнений (2).

Во многих случаях найти однозначное аналитическое выражение m различных переменных из условий связи (2) невозможно. В этом случае для отыскания условного экстремума при ограничениях

$$X = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) = 0, i = \overline{1,m}\},$$

имеющих вид равенств, привлекают *метод множителей Лагранжа*.

Предположим, что система условий связи разрешена (система (3) найдена) и задача сведена к отысканию безусловного экстремума функции

$$q = q(\mathbf{x}, y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_m(\mathbf{x})).$$

Пусть в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{opt}$ функция $q(\mathbf{x})$ достигает локального (безусловного) экстремума. Необходимым условием экстремума функции в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{opt}$ является равенство градиента нулю раскрыть. Но тогда в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{opt}$ равным нулю будет первый дифференциал

$$dy\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{opt}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_k} dx_k + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial q}{\partial y_s} dy_s \right)\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{opt} \\ \mathbf{y}=\mathbf{b}}} = 0, \qquad (4)$$

где точка $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ определяется из условий связи:

$$b_s = y_s(\mathbf{x}_{opt}),\ s = \overline{1,m}.$$

Пусть во все условия связи (2) подставлено решение (3). Тогда все уравнения системы (2) обратятся в тождества. Вычисляя дифференциалы от обеих частей этих тождеств, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_s} dy_s = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Умножим все уравнения полученной системы на неопределённые пока множители u_i, $i = \overline{1,m}$ и сложим их почленно с равенством (4):

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q}{\partial x_k}dx_k+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial q}{\partial y_s}dy_s+\sum_{i=1}^{m}\left(u_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_k}dx_k+u_i\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial y_s}dy_s\right)=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}\left(u_i\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right)\right)dx_k+\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial q}{\partial y_s}+\sum_{i=1}^{m}\left(u_i\frac{\partial g_i}{\partial y_s}\right)\right)dy_s=0. \qquad (5)$$

Определим *функцию Лагранжа*

$$L(\mathbf{x},\mathbf{y})=q+\sum_{i=1}^{m}u_i g_i .$$

Эта функция содержит дополнительные переменные u_i, которые называют множителями Лагранжа. Равенство (5) можно записать в виде

$$dL\Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{opt}\\ \mathbf{y}=\mathbf{b}}}=0.$$

Следовательно, если в точке $(\mathbf{x}_{opt},\mathbf{b})$ достигается условный экстремум функции $q=q(\mathbf{x},\mathbf{y})$, то эта точка является стационарной точкой функции Лагранжа. Таким образом, задача исследования функции на условный экстремум сведена к задаче исследования функции Лагранжа на безусловный экстремум.

При использовании метода множителей Лагранжа проверка необходимого условия локального экстремума требует решения системы $n+2m$ в общем случае нелинейных уравнений. Поэтому если решение выполняется аналитически, то метод множителей Лагранжа приводит к более громоздким выкладкам по сравнению с методом исключения переменных из целевой функции.

Метод условной минимизации допускает обобщение на случай ограничений-неравенств; существование экстремума связано с наличием у функции Лагранжа седловой точки. Точка $(\mathbf{x}_{opt},\mathbf{u}_{opt})$ называется седловой точкой функции $L(\mathbf{x},\mathbf{u})$, если для любых $u_i\geq 0$ выполнены неравенства

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u}_{opt})\geq L(\mathbf{x}_{opt},\mathbf{u}_{opt})\geq L(\mathbf{x}_{opt},\mathbf{u}); \qquad (6)$$

иначе говоря, в этой точке достигается минимум по переменной **x** и максимум по переменной **u**.

Связь между седловой точкой функции Лагранжа и решением соответствующей оптимизационной задачи описывается прямой и обратной теоремами.

Первая из них показывает, что существование седловой точки влечёт за собой наличие экстремума.

Теорема. Если $\left(\mathbf{x}_{\text{opt}}, \mathbf{u}_{\text{opt}}\right)$ – седловая точка функции Лагранжа, то

$$\mathbf{x}_{\text{opt}} = \arg\min_{\mathbf{x}\in X} q(\mathbf{x}), \quad X = \left\{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \le 0, i = \overline{1,m}\right\}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что из (6) следует

$$f\left(\mathbf{x}_{\text{opt}}\right) = L\left(\mathbf{x}_{\text{opt}}, \mathbf{u}_{\text{opt}}\right) \le L\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{\text{opt}}\right) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_{i,\text{opt}} g_i(\mathbf{x}).$$

В утверждении, обратном к первой теореме, требуются дополнительные условия.

Теорема. Пусть f и g_i – выпуклые функции, и существует точка $\mathbf{x}_{\text{opt}}$, доставляющая минимум целевой функции q. Тогда существуют значения $u_{i,\text{opt}}$, для которых точка $L\left(\mathbf{x}_{\text{opt}}, \mathbf{u}_{\text{opt}}\right)$ является седловой точкой функции Лагранжа.

Условия, связывающие оптимальность с седловой точкой функции Лагранжа, имеют большое теоретическое значение, так как применимы к весьма общим ситуациям. На практике используют дифференциальную форму условий оптимальности:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \begin{cases} > 0, x_j = 0 \\ = 0, x_j > 0 \end{cases}, \ j = \overline{1,n},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_u} = \begin{cases} > 0, u_i = 0 \\ = 0, u_i > 0 \end{cases}, i = \overline{1,m},$$

известную под названием *условий Куна – Таккера*.

5. КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Квадратичным программированием является область математического программирования, в котором рассматриваются задачи условной оптимизации квадратичных целевых функций при линейных условиях связи.

Пусть задана квадратичная целевая функция *n* переменных

$$q(\mathbf{x}) = f(x_1,...,x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ ,$$

или, в векторной форме

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{Bx} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}, \qquad (7)$$

вместе с условиями связи – линейными неравенствами:

$$\psi_j(x) = \psi_j(x_1,...,x_n) = a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n + a_j \le 0, \ (j = 1,...,m)$$

или, в векторной форме

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{a} \le 0, \qquad (8)$$

и пусть неравенства (8) определяют некоторую область Ω.

Пусть матрица $\mathbf{B} = (b_{ij})$ симметричная и положительно определенная (тогда $q(\mathbf{x})$ – выпуклая функция).

Задача квадратичного программирования: найти точку $\mathbf{x}^* \in \Omega$, для которой достигается минимум функции (7) при ограничениях (8):

$$q(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}^* \in \Omega} q(\mathbf{x}), \qquad (9)$$

Пусть, например, требуется распределить фонды между возможными инвестициями. Пусть инвестиция *i* имеет ожидаемую прибыль $\overline{p}_i$ на каждый вложенный чатл. Тогда, если x_i – количество чатлов в *i*-й инвестиции, то ожидаемая прибыль составит $\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i x_i$.

Пусть также портфель вкладов $\mathbf{x} = (x_i)$ должен удовлетворять определенным ограничениям $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $x_i \ge 0$, где $\mathbf{A}$ – матрица размера $m \times n$, $\mathbf{b}$ – вектор высоты *m*. Эти ограничения отражают суммарные фонды, лимиты на количества фондов, вложенных в данную категорию инвестиций и т.д.

Первым приближением является задача линейного программирования на максимизацию ожидаемой прибыли при ограничениях:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i x_i \text{ при } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \; x_i \geq 0.$$

Однако данная модель не учитывает дисперсию и может привести к невыгодному решению.

Для уточнения модели положим κ_{ij} – ковариация между вкладами *i* и *j* на каждый чатл, вложенный в соответствующую категорию инвестиций. Матрица ковариаций:

$$\mathbf{Z} = \left(\kappa_{ij}\right)$$

и дисперсия для любого портфеля **x** равна $\mathbf{x}^t\mathbf{Zx}$.

Другая формулировка задачи заключается в выборе портфеля вкладов, который минимизирует дисперсию и обеспечивает ожидаемую прибыль не менее некоторого фиксированного количества *c*. В итоге получена задача:

$$\min \mathbf{x}^t\mathbf{Zx}, \; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \; \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i x_i \geq c, \; x_i \geq 0,$$

являющаяся задачей квадратичного программирования.

6. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НА АНАЛИТИЧЕСКУЮ УСЛОВНУЮ ОПТИМИЗАЦИЮ

Это будете решать Вы. Задачи я дам. Наподобие: «найти параллелепипед наибольшего объема, вписанный в шар заданного радиуса». Но поприкладнее.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Трактовка термина *оптимизация* зависит от области знания. В математическом анализе оптимизация понимается как аналитический поиск экстремумов функций в отсутствии или же при наличии аналитических ограничений. Как правило, последние имеют вид равенств; ограничения - неравенства существенно затрудняют поиск экстремумов, заставляя переходить к таким методам, как линейное и нелинейное (квадратичное и т.п.) программирование.

Формулировка критерия оптимальности в прикладных задачах является существенно более сложной по сравнению с выбором математических процедур (вычислительно-логических алгоритмов) решения оптимизационной задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аоки М. Введение в методы оптимизации / пер. с англ. Москва: Наука, 1977. 344 с.

2. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 440 с.

3. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583 с.

4. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация / пер. с англ. Москва: Мир, 1985. 509 с.

5. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.

6. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.